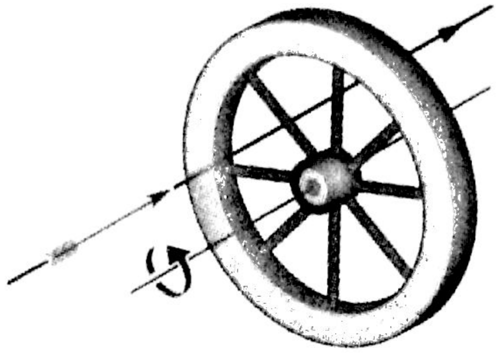
●●●۷- چرخ نشان داده شده در شکل ۱۰-۳۰ دارای هشت پره با فاصله‌های مساوی و شعاع ۳۰cm است. این چرخ روی محور ثابتی قرار دارد و با تندی ۲/۵ rev/s می‌چرخد. می‌خواهیم پیکانی به طول ۲۰cm را موازی با محور چرخش

Scanned by CamScanner

طوری پرتاب کنیم که بدون برخورد با هیچ کدام از پره‌ها از چرخ بگذرد. فرض کنید که پیکان و پره‌ها بسیار باریک‌اند. (الف) کمینهٔ تندی پیکان چقدر باید باشد؟ (ب) آیا مهم است که چه نقطه‌ای در فاصلهٔ میان محور و کنارهٔ چرخ هدف گرفته شود؟ اگر چنین است بهترین مکان آن کجاست؟



شکل ۱۰–۲۷ مسئلهٔ ۷

حل: (الف) ابتدا سرعت زاویه را محاسبه می‌کنیم:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{۲/۵ \times ۲\pi}{۱} = ۱۵/۷\,\text{rad/s}$$

سپس محاسبه می‌کنیم چه مدت زمانی طول می‌کشد تا چرخ به اندازهٔ $\frac{۲\pi}{۸} = \frac{\pi}{۴}$ بچرخد.

$$t = \frac{\theta}{\omega} \Rightarrow t = \frac{\frac{\pi}{۴}}{۱۵/۷} = ۰/۰۵\,\text{s}$$

نیزه پرتاب شده، در همین زمان باید از میان پره‌ها عبور کنند. پس

$$v_{\min} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۰/۲}{۰/۰۵} = ۴\,\text{m/s}$$

(ب) خیر، محل هدف‌گیری اهمیتی ندارد.

Scanned by CamScanner

۸●●●- شتاب زاویه‌ای چرخی عبارت است از $\alpha = ۶/۰ t^{۴} - ۴/۰ t^{۲}$ که در آن α برحسب رادیان بر مجذور ثانیه و t برحسب ثانیه است. در لحظهٔ $t = ۰$ چرخ دارای سرعت زاویه‌ای $+۲/۰ \text{rad/s}$ و مکان زاویه‌ای $+۱ \text{ rad}$ است. عبارتی برای (الف) سرعت زاویه‌ای (rad/s) و (ب) مکان زاویه‌ای (rad) به صورت تابعی از زمان (s) بنویسید.

حل: (الف) از تعریف شتاب زاویه‌ای داریم:

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$$

باید از رابطه انتگرال گرفته شود.

$$d\omega = \alpha\, dt \Rightarrow \int_{\omega_۱}^{\omega_۲} d\omega = \int_{t_۱}^{t_۲} \alpha\, dt$$

$$\int_{۲}^{\omega} d\omega = \int_{۰}^{t} (۶t^{۴} - ۴t^{۲})\, dt = \frac{۶}{۵} t^{۵} - \frac{۴}{۳} t^{۳}$$

$$\omega - ۲ = \frac{۶}{۵} t^{۵} - \frac{۴}{۳} t^{۳} \Rightarrow \omega = ۱/۲ t^{۵} - ۱/۳۳ t^{۳} + ۲$$

(ب) از تعریف سرعت زاویه‌ای داریم:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega\, dt$$

$$\int_{\theta_۱}^{\theta_۲} d\theta = \int_{t_۱}^{t_۲} \omega\, dt$$

Scanned by CamScanner

$$\int_{۱}^{\theta} d\theta = \int_{۰}^{t} \left(\frac{۶}{۵} t^{۵} - \frac{۴}{۳} t^{۳} + ۲ \right) dt$$

$$\theta - ۱ = \frac{۱}{۵} t^{۶} - \frac{۱}{۳} t^{۴} + ۲t$$

$$\theta = ۰/۲۰ t^{۶} - ۰/۳۳ t^{۴} + ۲/۰ t + ۱/۰$$

Scanned by CamScanner

۱۴۰۰- قرصی حول محور مرکزی خود از حال سکون شروع به چرخش می‌کند و با شتاب زاویه‌ای ثابت شتاب می‌گیرد. در یک لحظه قرص با تندی زاویه‌ای ۱۰rev/s می‌چرخد؛ پس از ۶۰ دور بعدی تندی زاویه‌ای آن به ۱۵rev/s می‌رسد. مطلوب است تعیین (الف) شتاب زاویه‌ای، (ب) زمان لازم برای پیمودن ۶۰ دور کامل. (پ) زمان لازم برای رسیدن به تندی زاویه‌ای ۱۰rev/s و (ت) تعداد دورهایی که قرص از حالت سکون تا زمانی که به تندی زاویه‌ای ۱۰rev/s می‌رسد چرخیده است.

حل: (الف) از رابطهٔ مستقل از زمان داریم:

$$\omega^۲ - \omega_\circ^۲ = ۲\alpha\,\Delta\theta \Rightarrow \alpha = \frac{\omega^۲ - \omega_\circ^۲}{۲\Delta\theta}$$

$$\alpha = \frac{(۱۵)^۲ - (۱۰)^۲}{۲\times ۶۰} = ۱/۰۴\,\text{rev/s}^۲$$

$$\alpha = ۱/۰۴\times ۲\pi = ۶/۵۴\,\text{rad/s}^۲$$

(ب)

$$\omega = \alpha t + \omega_\circ \Rightarrow t = \frac{\omega - \omega_\circ}{\alpha}$$

$$t = \frac{۱۵-۱۰}{۱/۰۴} = ۴/۸\,\text{s}$$

(پ)

$$\omega = \alpha t + \omega_\circ$$

$$۱۰ = ۱/۰۴t + ۰ \Rightarrow t = \frac{۱۰}{۱/۰۴} = ۹/۶\,\text{s}$$

(ت)

$$\omega^۲ - \omega_\circ^۲ = ۲\alpha\,\Delta\theta$$

$$\Delta\theta = \frac{\omega^۲}{۲\alpha} = \frac{۱۰۰}{۲\times ۱/۰۴} = ۴۸\,\text{rev}$$

Scanned by CamScanner

۱۷۰۰•• - چرخ لنگری در لحظهٔ $t = ۰$ دارای سرعت زاویه‌ای $۴/۷\ rad/s$، شتاب زاویه‌ای ثابت $-۰/۲۵\ rad/s^۲$ و خط مرجعی در $\theta_۰ = ۰$ است. (الف) زاویهٔ بیشینهٔ θ_{max}، که این خط مرجع به طرف مثبت می‌چرخد چقدر است؟ (ب) اولین و (پ) دومین زمانی که خط مرجع در $\theta = \frac{۱}{۲}\theta_{max}$ قرار می‌گیرد کدام است؟ در چه (ت) زمان منفی و (ث) زمان مثبتی خط مرجع به $\theta = -۱۰/۵\ rad$ می‌رسد؟ (ج) نمودار θ را برحسب t رسم کنید و پاسخ‌های (الف) تا (ث) را روی آن نشان دهید.

حل: (الف)

$$\omega^۲ - \omega_۰^۲ = ۲\alpha\Delta\theta$$

$$\Delta\theta = \theta_{max} - ۰$$

$$\theta_{max} = \frac{-\omega_۰^۲}{۲\alpha} = \frac{-(۴/۷)^۲}{-۲\times ۰/۲۵} = ۴۴\ rad$$

(ب) و (پ)

$$\theta = \frac{۱}{۲}at^۲ + \omega_۰ t \Rightarrow \theta = \frac{۱}{۲}(-۰/۲۵)t^۲ + (۴/۷)t$$

$$\frac{۱}{۲}(۴۴) = \frac{۱}{۲}(-۰/۲۵)t^۲ + ۴/۷t$$

$t_۱ = ۵/۵۰s$ $\quad\quad$ $t_۲ = ۳۲/۰۹s$

(ت) و (ث)

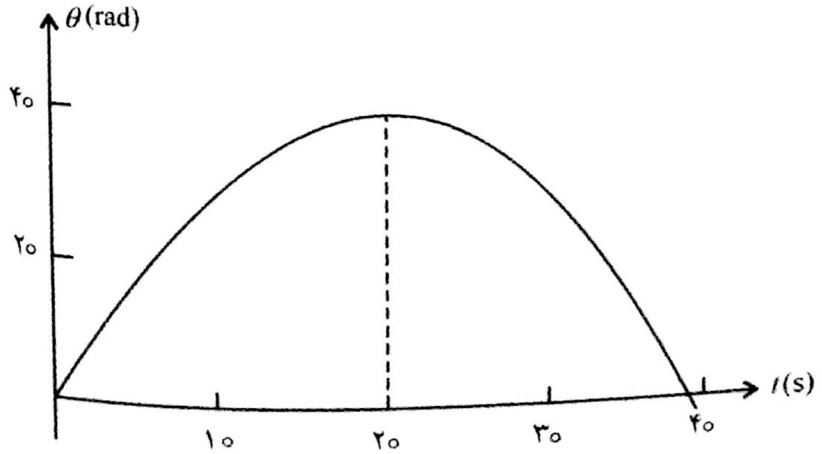
$$\theta = \frac{۱}{۲}\alpha t^۲ + \omega_۰ t$$

$$-۱۰ = \frac{۱}{۲}(-۰/۲۵)t^۲ + ۴/۷t$$

زمان منفی $t_۱ = -۲/۰۲$

زمان مثبت $t_۲ = ۳۹/۶۲$

(ج)



۱۸۰۰••• - اگر ... که

Scanned by CamScanner

••۲۶۰۰- چرخ لنگر یک ماشین بخار با سرعت زاویه‌ای ثابت ۱۵۰rev/min می‌چرخد. وقتی بخار قطع شود، اصطکاک یاتاقان‌ها و مقاومت هوا چرخ را پس از مدت ۲/۲ ساعت متوقف می‌کند. (الف) شتاب زاویه‌ای ثابت چرخ برحسب دور بر مجذور دقیقه در حین کند شدن حرکت چقدر است؟ (ب) چرخ قبل از توقف چند دور می‌چرخد؟ (پ) در لحظه‌ای که این چرخ لنگر با تندی زاویه‌ای ۷۵ rev/min می‌چرخد مؤلفهٔ مماسی شتاب خطی نقطه‌ای از چرخ لنگر که به فاصلهٔ ۵۰cm از محور چرخش قرار دارد چقدر است؟ (ت) بزرگی شتاب خالص نقطهٔ ذکر شده در قسمت (پ) چقدر است؟

حل: (الف)

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{-۱۵۰}{۲/۲\times۶۰} = -۱/۱۴ \text{ rev/min}^۲$$

(ب) از رابطهٔ مستقل از زمان استفاده می‌کنیم:

$$\omega^۲ - \omega_۰^۲ = ۲\alpha\,\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{-\omega_۰^۲}{۲\alpha}$$

$$\Delta\theta = \frac{-(۱۵۰)^۲}{-۲\times۱/۱۴} = ۹/۹\times۱۰^۳ \text{ rev}$$

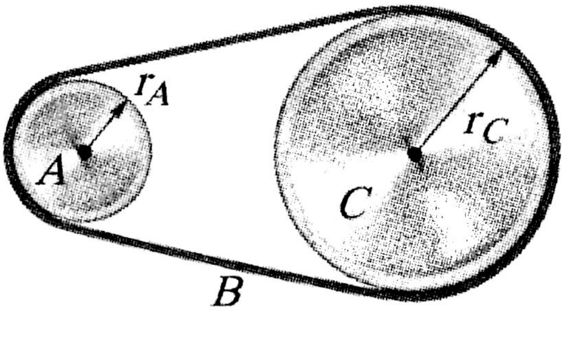
(پ) $$a_T = R\alpha = -۰/۵\times۱/۱۴\times\frac{۲\pi}{(۶۰)^۲} = -۰/۹۹۴\times۱۰^{-۳} \text{ m/s}^۲$$

(ت) $$a_R = r\omega^۲ = ۰/۵\left(۷۵\times\frac{۲\pi}{۶۰}\right)^۲ \approx ۳۱ \text{ m/s}^۲$$

$$a = \sqrt{a_R^۲ + a_T^۲} = \sqrt{(۳۱)^۲ + (-۰/۹۹۴\times۱۰^{-۳})^۲} = ۳۱\text{m/s}^۲$$

Scanned by CamScanner

●●۲۸- در شکل ۱۰–۲۸ چرخ A به شعاع $r_A =$ ۱۰cm توسط تسمهٔ B به چرخ C به شعاع $r_C =$ ۲۵cm وصل شده است. تندی زاویه‌ای چرخ A را از حال سکون با آهنگ ثابت ۱/۶ rad/s^2 افزایش می‌دهیم. زمان لازم برای اینکه چرخ C به تندی زاویه‌ای ۱۰۰rev/min برسد چقدر است؟ فرض کنید که تسمه لغزش ندارد. (راهنمایی: اگر تسمه لغزش نداشته باشد سرعت‌های خطی در هر دو لبهٔ چرخ‌ها باید برابر باشند.)



شکل ۱۰–۲۸ مسئلهٔ ۲۸

Scanned by CamScanner

حل: چون سرعت خطی دو لبهٔ دو چرخ با هم برابر است پس:

$$v_C = v_A \qquad r_C\omega_C = r_A\omega_A$$

$$\alpha_C = \frac{r_A}{r_C}\alpha_A \qquad \omega_C = \frac{r_A}{r_C}\omega_A$$

$$\omega_C = ۱۰۰\,\text{rev/min} = ۱۰/۴۷\,\text{rad/s}$$

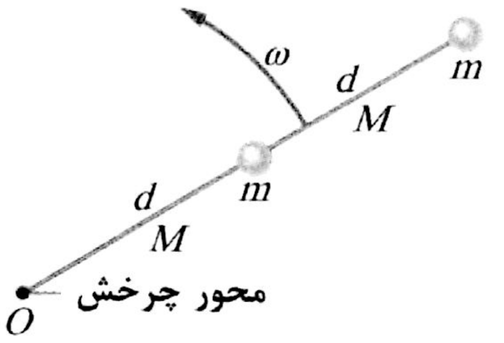
$$\alpha_C = \frac{۱۰}{۲۵}۱/۶ = ۰/۶۴\,\text{rad/s}^۲$$

$$\omega_C = \alpha_C t \Rightarrow t = \frac{\omega_C}{\alpha_C} = \frac{۱۰/۴۷}{۰/۶۴} = ۱۶\,\text{s}$$

α_C شتاب زاویه‌ای چرخ C و ω_C سرعت داده شدهٔ آن است.

Scanned by CamScanner

۴۱۰۰- GO شکل ۱۰-۳۴ دو جسم هر یک به جرم $m = ۰/۸۵\,\text{kg}$ را نشان می‌دهد که توسط دو میلهٔ نازک هر یک به طول $۵/۶\,\text{cm}$ و جرم $M = ۱/۲\,\text{kg}$ به یکدیگر و محور چرخش در نقطهٔ O متصل‌اند. کل این مجموعه با تندی زاویه‌ای $\omega = ۰/۳۰\,\text{rad/s}$ حول محور چرخش می‌چرخد. (الف) لختی چرخشی و (ب) انرژی جنبشی این مجموعه نسبت به نقطهٔ O چقدر است؟



شکل ۱۰-۳۴ مسئلهٔ ۴۱

حل: (الف) لختی چرخش میلهٔ اول برابر است با:

$$I_۱ = \frac{۱}{۳} M d^۲$$

از قضیهٔ محورهای موازی استفاده می‌کنیم تا لختی چرخشی میلهٔ دوم را بیابیم: (نسبت به O)

$$I_۲ = \frac{۱}{۱۲} Md^۲ + M\left(d + \frac{d}{۲}\right)^۲ = \frac{۷}{۳} Md^۲$$

بنابراین لختی چرخشی کل برابر است با:

$$I = I_۱ + I_۲ + I_۳ + I_۴ = \frac{۱}{۳} Md^۲ + \frac{۷}{۳} Md^۲ + md^۲ + ۴md^۲$$

$$I = \left(۵m + \frac{۸}{۳} M\right) d^۲$$

$$I = \left(۵ \times ۰/۸۵ + \frac{۸}{۳} \times ۱/۲\right)(۰/۰۵۶)^۲ = ۰/۰۲۳\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲$$

(ب)
$$K = \frac{۱}{۲} I\omega^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۰/۰۲۳ (۰/۳)^۲ = ۱/۰۴ \times ۱۰^{-۳}\,\text{J}$$

Scanned by CamScanner

••۴۲۰۰- جرم‌ها و مختصات چهار ذره عبارت‌اند از:

$۵۰g$ ، $x = ۲/۰\,\text{cm}$ ، $y = ۲/۰\,\text{cm}$ ؛ $۲۵g$ ، $x = ۰$ ، $y = ۴/۰\,\text{cm}$

$۲۵g$ ، $x = -۳/۰\,\text{cm}$ ، $y = -۳/۰\,\text{cm}$ ؛ $۳۰g$ ، $x = -۲/۰\,\text{cm}$ ،

Scanned by CamScanner

$y = ۴/۰\,\text{cm}$. لختی چرخشی این مجموعه را حول محورهای (الف) x، (ب) y و (پ) z به دست آورید. (ت) فرض کنید پاسخ قسمت (الف) و (ب) به ترتیب A و B باشد، آنگاه پاسخ (پ) برحسب A و B چقدر است؟

حل: (الف)

$$I = \sum_i m_i r_i^۲$$

$$I_x = \sum_i m_i y_i^۲ \Rightarrow I_x = m_۱ y_۱^۲ + m_۲ y_۲^۲ + m_۳ y_۳^۲ + m_۴ y_۴^۲$$

$$I_x = ۵۰\times ۱۰^{-۳}\,(۰/۰۲)^۲ + ۲۵\times ۱۰^{-۳}\,(۰/۰۴)^۲ + ۲۵$$
$$\times ۱۰^{-۳}\,(-۰/۰۳)^۲ + ۳۰\times ۱۰^{-۳}\,(۰/۰۴)^۲$$

$$I = ۱/۳\times ۱۰^{-۴}\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲ = ۱/۳\times ۱۰^۳\,\text{g}\cdot\text{cm}^۲$$

(ب)

$$I_y = \sum_i m_i x_i^۲$$

$$I_y = m_۱ x_۱^۲ + m_۲ x_۲^۲ + m_۳ x_۳^۲ + m_۴ x_۴^۲$$

$$I_y = ۵۰\times ۱۰^{-۳}\,(۰/۰۲)^۲ + ۲۵\times ۱۰^{-۳}\,(۰) + ۲۵\times ۱۰^{-۳}\,(-۰/۰۳)^۲$$
$$+ ۳۰\times ۱۰^{-۳}\,(-۰/۰۲)^۲$$

$$I_y = ۵/۵\times ۱۰^{-۵}\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲ = ۵/۵\times ۱۰^۲\,\text{g}\cdot\text{cm}^۲$$

(پ)

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^۲ + y_i^۲) = \sum_i m_i x_i^۲ + \sum_i m_i y_i^۲ = I_x + I_y$$

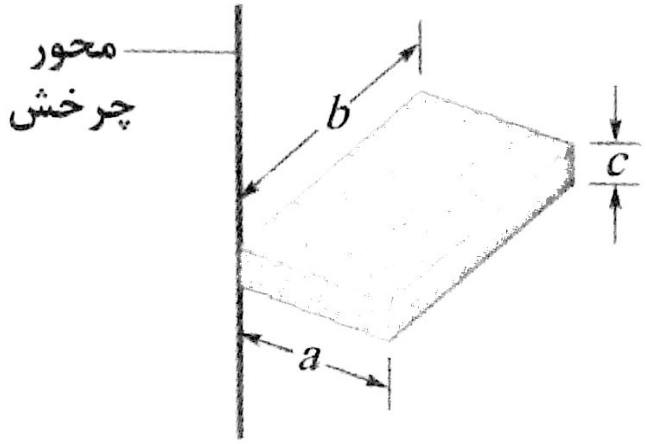
$$I_z = ۱/۹\times ۱۰^{-۴}\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲ = ۱/۹\times ۱۰^۲\,\text{g}\cdot\text{cm}^۲$$

(ت)

$$I_x = A \qquad I_y = B \qquad I_z = I_x + I_y = A + B$$

Scanned by CamScanner

••۴۳- WWW SSM قطعهٔ صلب و یکنواخت در شکل ۱۰-۳۵ دارای جرم $۰/۱۷۲ \text{kg}$ و ضلع‌های $a = ۳/۵ \text{cm}$، $b = ۸/۴ \text{cm}$ و $c = ۱/۴ \text{cm}$ است. لختی چرخشی این قطعه را حول محوری که از یکی از گوشه‌های آن می‌گذرد و بر وجه‌های بزرگ‌تر عمود است حساب کنید.



شکل ۱۰-۳۵ مسئلهٔ ۴۳

حل: از تعریف لختی چرخشی داریم:

$$I = \int r^۲ dm$$

$$dm = \rho\, dv = \rho\, dx\; dy\; dz$$

$$\rho = \frac{M}{abc}$$

$$r^۲ = x^۲ + y^۲$$

$$I = \int_v (x^۲ + y^۲)\rho\, dx\; dy\; dz = \rho\, c \int_s (x^۲ + y^۲)\, dx\; dy$$

$$\rho c\left[\int_۰^a x^۲ dx \int_۰^b dy + \int_۰^a dx \int_۰^b y^۲ dy\right]$$

$$\frac{M}{abc} c\left[\frac{۱}{۳} a^۳ b + a \frac{۱}{۳} b^۳\right] = \frac{M}{ab}\left[\frac{۱}{۳} a^۳ b + \frac{۱}{۳} a b^۳\right]$$

Scanned by CamScanner

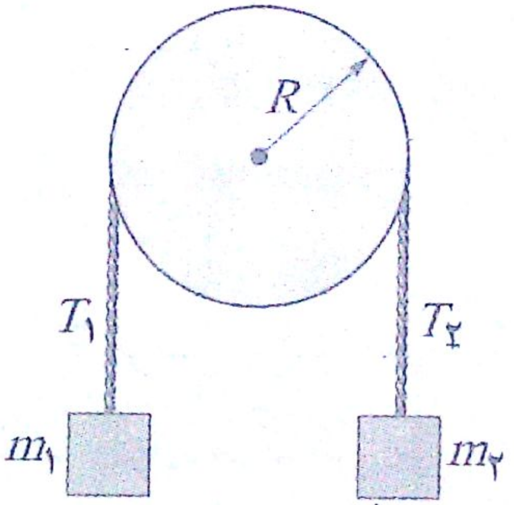
$$I = \frac{M}{۳}[a^{۲} + b^{۲}]$$

$$I = \frac{۱}{۳} \times ۰/۱۷۲ \times [(۰/۰۳۵)^{۲} + (۰/۰۸۴)^{۲}] = ۴/۷ \times ۱۰^{-۴}\ \mathrm{kg \cdot m^{۲}}$$

Scanned by CamScanner

a ۲۵

●●۵۱- در شکل ۱۰-۳۸ جرم یک جسم $m_۱ = ۴۶۰\,g$ و جرم دیگری $m_۲ = ۵۰۰\,g$ است، و قرقره که روی محوری افقی و بدون اصطکاک سوار شده دارای شعاع $۵/۰۰\,cm$ است. وقتی آنها را از حال سکون رها کنیم، جسم سنگین‌تر به اندازهٔ $۷۵/۰\,cm$ در مدت $۵/۰۰\,s$ (بدون اینکه نخ روی قرقره بلغزد) به طرف پایین می‌آید. (الف) بزرگی شتاب این جسم چقدر است؟ کشش ریسمان در قسمتی که (ب) جسم سنگین‌تر و (پ) جسم سبک‌تر را نگه می‌دارد چقدر است؟ (ت) بزرگی شتاب زاویه‌ای قرقره چقدر است؟ (ث) لختی چرخشی آن چقدر است؟



شکل ۱۰-۳۸ مسئله‌های ۵۱ و ۸۳

حل: (الف) برای سقوط جرم $m_۲$ داریم:

$$y = \frac{۱}{۲} a t^۲$$

$$a = \frac{۲y}{t^۲} = \frac{۲ \times ۰/۷۵}{۲۵} = ۰/۰۶\,m/s^۲$$

$$m_۲ g - T_۲ = m_۲ a \Rightarrow T_۲ = m_۲ (g - a)$$

ب) $T_۲ = ۰/۵ \times (۹/۸ - ۰/۰۶) = ۴/۸۷\,\text{N}$

پ) شتاب جسم $m_۱$ نیز $۰/۰۶\ \text{m/s}^۲$ است. چون در همان زمان، همان جابجایی را دارد.

$$T_۱ - m_۱ g = m_۱ a \Rightarrow T_۱ = m_۱(g + a)$$

$$= ۰/۴۶(۹/۸ + ۰/۰۶) = ۴/۵۳\,\text{N}$$

ت) $$a = R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R} = \frac{۰/۰۶}{۰/۰۵} = ۱/۲\,\text{rad/s}^۲$$

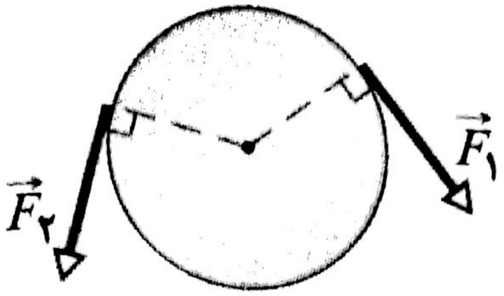
ث) $$\tau = I\alpha \Rightarrow (T_۲ - T_۱)R = I\alpha \Rightarrow I = \frac{(T_۲ - T_۱)R}{\alpha}$$

$$I = \frac{۴/۸۷ - ۴/۵۳}{۱/۲} ۰/۰۵ = ۰/۰۱۴\,\text{kg} \cdot \text{m}^۲$$

Scanned by CamScanner

●●۵۳۰۰- GO شکل ۱۰-۴۰ قرص یکنواختی را نشان می‌دهد که همانند یک چرخ و فلک حول مرکزش می‌چرخد. شعاع این قرص برابر ۲/۰۰cm و جرم آن ۲۰/۰ گرم و در ابتدا در حال سکون است. با شروع از زمان $t=0$ دو نیروی نشان داده شده بر لبهٔ آن به‌طور مماس وارد می‌شوند به‌طوری که در زمان $t=1/25\,s$ این قرص دارای سرعت زاویه‌ای ۲۵۰rad/s به‌طور پادساعتگرد است. نیروی $\vec{F}_1$ دارای بزرگی ۰/۱۰۰N است. بزرگی نیروی $\vec{F}_2$ چقدر است؟

Scanned by CamScanner



شکل ۱۰–۴۰ مسئلهٔ ۵۳

حل: ابتدا گشتاور نیرو را می‌یابیم.

$$I = \frac{1}{2} mR^2 = \frac{1}{2}(20\times10^{-3})(2\times10^{-2})^2 = 4\times10^{-6}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\tau = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{250}{1/25} = 200\ \text{rad/s}^2$$

جایگذاری می‌کنیم

$$\tau = 4\times10^{-6}\,(200) = 8\times10^{-4}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

از طرفی برای گشتاور نیرو داشتیم:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1\times\vec{F}_1 + \vec{r}_2\times\vec{F}_2$$

$$\tau = -0/02\times0/1 + 0/02\times F_2$$

اکنون دو گشتاور را برابر قرار می‌دهیم.

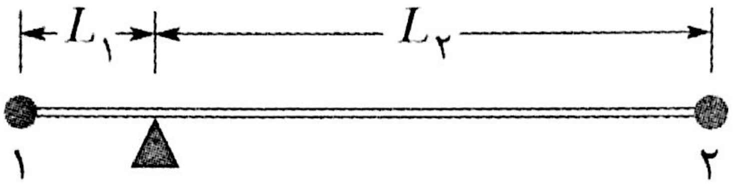
$$8\times10^{-4} = 2\times10^{-3} + 2\times10^{-2}\,F_2$$

$$28\times10^{-4} = 2\times10^{-2}\,F_2$$

$$F_2 = 0/14\text{N}$$

Scanned by CamScanner

••۵۶- شکل ۱۰-۴۳ دو ذرهٔ ۱ و ۲ را نشان می‌دهد که جرم هر یک m است و به دو انتهای میلهٔ بدون جرم صلبی به طول $L_۱ + L_۲$ متصل‌اند، به‌طوری که $L_۱ = ۲۰\,cm$ و $L_۲ = ۸۰\,cm$. این میله را به‌طور افقی روی تکیه‌گاهی قرار می‌دهیم و سپس رها می‌کنیم. بزرگی شتاب‌های اولیهٔ (الف) ذرهٔ ۱ و (ب) ذرهٔ ۲ چقدر است؟



شکل ۱۰-۴۳ مسئلهٔ ۵۶

حل: (الف) ابتدا گشتاور نیروی کل را می‌یابیم

رو به خارج صفحه را مثبت در نظر می‌گیریم. $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\tau = mgL_۱ - mgL_۲ = mg(L_۱ - L_۲) = -mg(L_۲ - L_۱)$$

بعضی گشتاور برآیند، رو به داخل صفر است.

$$|\tau| = I\alpha$$

$$I = m_۱L_۱^۲ + m_۲L_۲^۲ = m(L_۱^۲ + L_۲^۲)$$

$$\Rightarrow mg(L_۲ - L_۱) = m(L_۱^۲ + L_۲^۲)\alpha$$

$$\alpha = g\frac{L_۲ - L_۱}{L_۱^۲ + L_۲^۲} = ۸/۶۵\,\text{rad/s}^۲$$

اکنون از رابطهٔ بین شتاب خطی و شتاب زاویه‌ای استفاده می‌کنیم:

$$|a_۱| = L_۱\alpha = ۰/۲ \times ۸/۶۵ = ۱/۷۳\,\text{m/s}^۲$$

(ب)

$$|a_۲| = L_۲\alpha = ۰/۸ \times ۸/۶۵ = ۶/۹۲\,\text{m/s}^۲$$

Scanned by CamScanner

●●●۵۷- قرقره‌ای به شعاع ۱۰cm و لختی چرخشی $۱/۰\times ۱۰^{-۳}\ \text{kg.m}^۲$ نسبت به محورش، تحت تأثیر نیرویی مماس بر لبهٔ آن قرار دارد. بزرگی این نیرو برحسب زمان به صورت $F=۰/۵t+۰/۳t^۲$ تغییر می‌کند که F برحسب نیوتون و t برحسب ثانیه است. این قرقره ابتدا در حال سکون است. در $t=۳/۰\text{s}$ (الف) شتاب زاویه‌ای و (ب) تندی زاویه‌ای آن را به دست آورید.

Scanned by CamScanner

حل: **(الف)** از روابط گشتاور بهره می‌گیریم:

$$\tau = I\alpha \qquad \tau = RF$$

$$RF = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{R}{I}F = \frac{۰/۱}{۱۰^{-۳}}(۰/۵t + ۰/۳t^{۲})$$

$$= (۳۰۰t^{۲} + ۵۰۰t)\frac{\text{rad}}{\text{s}^{۲}}$$

$$\alpha(t=۳) = ۳۰۰(۳)^{۲} + ۵۰۰(۳) = ۴۲۰۰\ \text{rad/s}^{۲}$$

(ب)

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \omega = \int \alpha\, dt = \int_{۰}^{۳} (۳۰۰t^{۲} + ۵۰۰t)\, dt$$

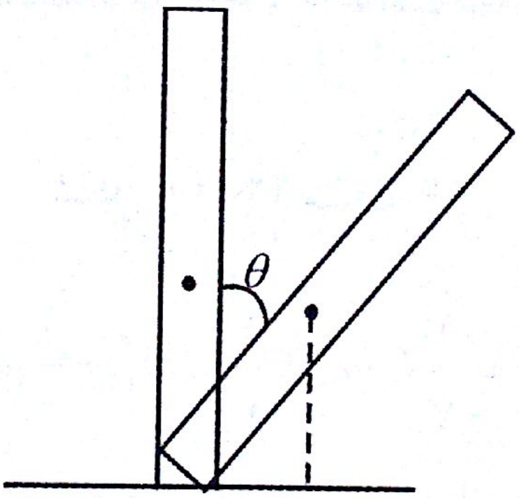
$$\omega = (۱۰۰t^{۳} + ۲۵۰t^{۲})\Big|_{۰}^{۳} = ۴۹۵۰\ \text{rad/s}$$

Scanned by CamScanner

۶۵- ●●●● یک دودکش استوانه‌ای بلند از پایه شکسته می‌شود و به زمین سقوط می‌کند. دودکش را به صورت میله‌ای نازک به طول m ۵۵/۰ در نظر بگیرید. در لحظه‌ای که دودکش با محور قائم زاویهٔ °۳۵/۰ دارد، (الف) تندی زاویه‌ای و (ب) شتاب شعاعی نوک آن و (پ) شتاب مماسی نوک دودکش چقدر است؟ (*راهنمایی:* از پایستگی انرژی استفاده کنید، نه از گشتاور نیرو). (ت) در چه زاویهٔ θ شتاب مماسی برابر g خواهد بود؟

حل: (الف)

$$E_۱ = E_۲$$



$$mg\frac{L}{۲} = mg\frac{L}{۲}\cos\theta + \frac{۱}{۲}I\omega^۲ \qquad I = \frac{۱}{۳}mL^۲$$

$$\frac{۱}{۲}mgL(۱-\cos\theta) = \frac{۱}{۲}\frac{۱}{۳}mL^۲\omega^۲$$

$$\omega^۲ = \frac{۳g}{L}(۱-\cos\theta) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{۳\times۹/۸}{۵۵}(۱-\cos(۳۵°))}$$

$$= ۰/۳۱ \text{ rad/s}$$

Scanned by CamScanner

(ب) شتاب شعاعی نوک دودکش برابر است با:

$$a_R = L\omega^{۲} = ۳g(۱-\cos\theta) = ۳\times ۹/۸(۱-\cos(۳۵°))$$
$$= ۵/۳۲\,\text{m/s}^{۲}$$

(پ) از مشتق‌گیری زنجیری استفاده می‌کنیم.

$$a_T = L\alpha = L\frac{d\omega}{dt} = L\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = L\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

$$\omega = \left(\frac{۳g}{L}(۱-\cos\theta)\right)^{۱/۲} \Rightarrow \frac{d\omega}{d\theta} = \left(\frac{۳g}{L}\right)^{۱/۲}\frac{۱}{۲}\sin\theta(۱-\cos\theta)^{-۱/۲}$$

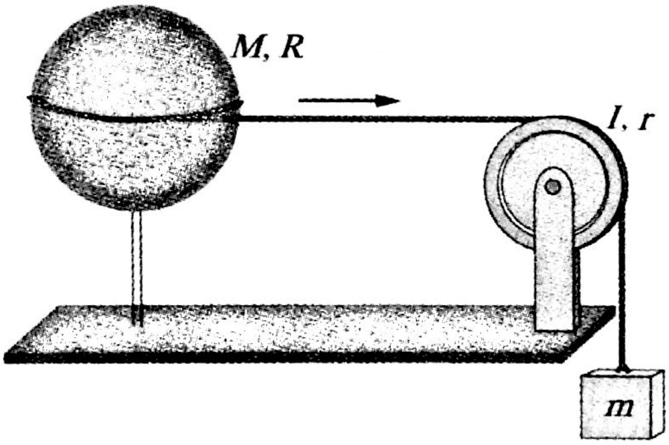
$$\Rightarrow a_T = L\left(\frac{۳g}{L}\right)^{۱/۲}(۱-\cos\theta)^{۱/۲}\left(\frac{۳g}{L}\right)^{۱/۲}\frac{۱}{۲}\sin\theta(۱-\cos\theta)^{-۱/۲}$$

$$a_T = \frac{۳g}{۲}\sin\theta \Rightarrow a_T(\theta = ۳۵°) = \frac{۳}{۲}(۹/۸)\sin(۳۵°)$$
$$= ۸/۴۳\,\text{m/s}^{۲}$$

(ت) $$a_T = g \Rightarrow \frac{۳}{۲}g\sin\theta = g \Rightarrow \sin\theta = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \theta = ۴۱/۸°$$

Scanned by CamScanner

●●●۶۶- GO پوستهٔ کروی یکنواختی به جرم $M = ۴/۵\text{kg}$ و شعاع $R = ۸/۵\text{cm}$ می‌تواند حول محوری قائم که روی یاتاقان بدون اصطکاکی (شکل ۱۰-۴۴) قرار دارد بچرخد. ریسمان بدون جرمی به دور استوای پوستهٔ کروی پیچیده شده و پس از عبور از روی قرقره‌ای با لختی چرخشی $I = ۳/۰ \times ۱۰^{-۳}\ \text{kg} \cdot \text{m}^۲$ و شعاع $r = ۵/۰\text{cm}$ به جسم کوچکی به جرم $m = ۰/۶۰\ \text{kg}$ متصل شده است. محور قرقره اصطکاک ندارد و ریسمان روی قرقره نمی‌لغزد. تندی جسم را وقتی به اندازهٔ ۸۲cm از حالت سکون پایین آمد به‌دست آورید. از پایستگی انرژی استفاده کنید.



شکل ۱۰-۴۴ مسئلهٔ ۶۶

حل: $E_۱ = E_۲ \Rightarrow mgh = \frac{۱}{۲} I_۱\, \omega_۱^۲ + \frac{۱}{۲} I_۲\, \omega_۲^۲ + \frac{۱}{۲} mv^۲$

$\omega_۲$ تندی زاویه‌ای قرقره و $\omega_۱$ تندی زاویه‌ای کره است.

$$\omega_۱ = \frac{v}{R} \qquad \omega_۲ = \frac{v}{r}$$

$$mgh = \frac{۱}{۲}\frac{۲}{۳} MR^۲ \frac{v^۲}{R^۲} + \frac{۱}{۲}\frac{۱}{۲} I_۲ \frac{v^۲}{r^۲} + \frac{۱}{۲} mv^۲$$

$$mgh = \frac{۱}{۵} Mv^۲ + \frac{۱}{۴}\frac{I_۲}{r^۲} v^۲ + \frac{۱}{۲} mv^۲$$

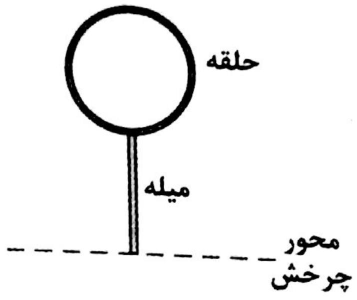
Scanned by CamScanner

$$۰/۶\times ۹/۸\times ۰/۸۲=\left(\frac{۱}{۵}\times ۴/۵+\frac{۱}{۴}\,\frac{۳\times ۱۰^{-۳}}{۲۵\times ۱۰^{-۴}}+\frac{۱}{۲}\times ۰/۶\right)v^{۲}$$

$$v=۱/۴۲\,\mathrm{m/s}$$

Scanned by CamScanner

۶۷●●● - ⓞⓞ شکل ۱۰-۴۵ مجموعهٔ صلبی شامل یک حلقهٔ نازک (به جرم m و شعاع $R = ۰/۱۵\,\text{m}$) و میلهٔ شعاعی نازکی (به جرم m و طول $L = ۲/۰۰R$) را نشان می‌دهد. این مجموعه به حالت قائم است، اما اگر ضربهٔ کوچکی به آن وارد کنیم می‌تواند حول محوری افقی در صفحهٔ میله و حلقه از انتهای پایین آن بچرخد. فرض کنید انرژی داده شده به این مجموعه در ضربهٔ اولیه ناچیز باشد، تندی زاویه‌ای این مجموعه حول محور چرخش وقتی از سمتگیری معکوس می‌گذرد چقدر است؟



شکل ۱۰-۴۵ مسئلهٔ ۶۷

حل: ابتدا مرکز جرم را می‌یابیم:

$$y_c = \frac{۱}{M}\sum_i m_i g_i \Rightarrow y_c = \frac{mR + ۳mR}{۲m} = ۲R$$

از پایستگی انرژی جنبشی داریم:

$$E_۱ = E_۲$$

$$۲mg\,y_c = -۲\,mg\,y_c + \frac{۱}{۲}I\omega^۲$$

$$\frac{۱}{۲}I\omega^۲ = ۴mg\,y_c \Rightarrow \omega^۲ = \frac{۸mg\,y_c}{I}$$

از قضیهٔ محورهای موازی برای یافتن گشتاور لختی حلقه حول محور دوران استفاده می‌کنیم:

$$I_{\text{حلقه}} = I_C + M\,h^۲ = \frac{۱}{۲}mR^۲ + m(R + ۲R)^۲$$

$$I_{\text{حلقه}} = \frac{۱}{۲}(۰/۱۵)^۲ m + ۹\times(۰/۱۵)^۲ m = ۰/۲۱۴\,\text{m}$$

گشتاور لختی کل سیستم نسبت به محور دوران برابر است با:

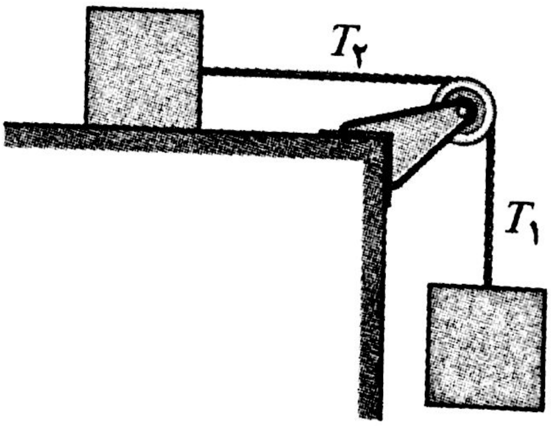
$$I = ۰/۲۱۴\,m + \frac{۱}{۳}m(۰/۳)^۲ = ۰/۲۴۴\,\text{m}$$

جایگذاری می‌کنیم:

$$\omega^۲ = \frac{۸mgy_c}{۰/۲۴۴\,\text{m}} = \frac{۸\times۹/۸\times۲\times۰/۱۵}{۰/۲۴۴} \Rightarrow \omega = ۹/۸۲\,\text{rad/s}$$

Scanned by CamScanner

۷۱- SSM در شکل ۱۰-۴۷ دو قطعه به جرم ۶/۲۰kg با نخ بدون جرمی که از روی قرقره‌ای به شعاع ۲/۴۰ cm می‌گذرد به هم متصل‌اند. لختی چرخشی قرقره برابر $۷/۴۰\times۱۰^{-۴}\ \mathrm{kg\cdot m^۲}$ است. این نخ هیچ لغزشی روی قرقره ندارد؛ ولی معلوم نیست که بین میز و جسم لغزنده اصطکاک وجود دارد یا خیر؛ محور قرقره نیز بدون اصطکاک است. وقتی این دستگاه از حال سکون رها شود، قرقره در مدت ۹۱/۰ ms به اندازهٔ ۱/۳۰rad می‌چرخد و شتاب دو جسم ثابت است. (الف) بزرگی شتاب زاویه‌ای قرقره چقدر است؟ (ب) بزرگی شتاب هر یک از دو جسم را به دست آورید. (پ) کشش نخ $T_۱$ چقدر است؟ (ت) کشش نخ $T_۲$ چقدر است؟



شکل ۱۰-۴۷ مسئلهٔ ۷۱

Scanned by CamScanner

حل: (الف) داریم:

$$\theta = \frac{۱}{۲}\alpha t^{۲}$$

$$\alpha = \frac{۲\theta}{t^{۲}} = \frac{۲\times ۰/۱۳}{(۹۱\times ۱۰^{-۳})^{۲}} = ۳۱/۴\,\text{rad/s}^{۲}$$

(ب) شتاب دو جسم با یکدیگر برابر است.

$$a = R\alpha \Rightarrow a = ۰/۰۲۴\times ۳۱/۱۴ = ۰/۷۵۴\,\text{m/s}^{۲}$$

(پ)

$$mg - T_{۱} = ma \Rightarrow T_{۱} = m(g-a)$$

$$T_{۱} = ۶/۲\times(۹/۸ - ۰/۷۵۴) = ۵۶/۱\text{N}$$

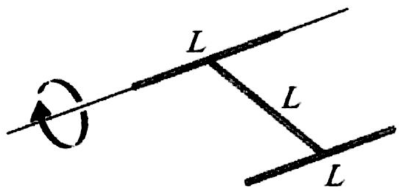
(ت) برآیند دو نیروی $T_{۱}$ و $T_{۲}$ به قرقره گشتاور $I\alpha$ وارد می‌کند.

$$(T_{۱} - T_{۲})R = I\alpha \Rightarrow T_{۲} = T_{۱} - \frac{I\alpha}{R}$$

$$T_{۲} = ۱۴/۱۴ - \frac{۷/۴\times ۱۰^{-۴}\times ۳۱/۴}{۰/۰۲۴} = ۵۵/۱\text{N}$$

Scanned by CamScanner

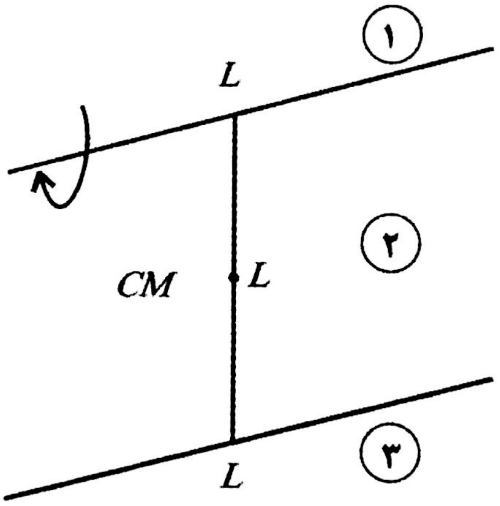
۷۸- جسم صلبی از سه میلهٔ نازک مشابه هر یک به طول $L = ۰/۶۰۰ \text{m}$ تشکیل شده است که به شکل حرف **H** (شکل ۱۰-۴۹) به هم متصل‌اند. این جسم می‌تواند آزادانه حول یک محور افقی که از یکی از ساق‌های حرف **H** می‌گذرد بچرخد. جسم را رها می‌کنیم تا از حال سکون و از وضعیتی که صفحهٔ **H** به صورت افقی است سقوط کند. تندی زاویه‌ای جسم در وقتی که صفحهٔ **H** به حالت قائم قرار می‌گیرد چقدر است؟



شکل ۱۰-۴۹ مسئلهٔ ۷۸

حل: از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. مرکز جرم سیستم در وسط میلهٔ $L_۲$ قرار دارد.

گشتاور لختی حول میلهٔ ۱ را به‌دست می‌آوریم.



$$I_۱ = ۰$$

$$I = I_۲ + I_۳ \Rightarrow I = \frac{۱}{۳}mL^۲ + mL^۲ = \frac{۴}{۳}mL^۲$$

m جرم هر میله است. جرم کل ۳m است.

$$E_۱ = E_۲$$

$$۳\,mg\frac{L}{۲} = \frac{۱}{۲}I\omega^۲$$

Scanned by CamScanner

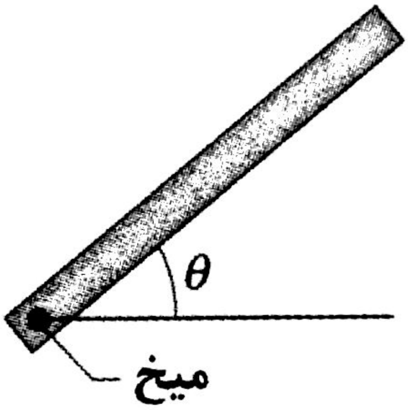
با جایگذاری به‌دست می‌آوریم:

$$\omega^{۲} = \frac{۹}{۴}\frac{g}{L}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{۹g}{۴L}} = \frac{۳}{۲}\sqrt{\frac{۹/۸}{۰/۶}} = ۶/۰۶ \text{ rad/s}$$

Scanned by CamScanner

۸۱- میلهٔ نازک و یکنواخت در شکل ۱۰-۵۰ دارای طول ۲/۰m است و می‌تواند حول یک میخ افقی که از یک انتهای آن می‌گذرد بچرخد. میله را از حال سکون با زاویهٔ $\theta = ۴۰°$ بالای افق رها می‌کنیم. با استفاده از اصل پایستگی انرژی تندی زاویه‌ای میله را وقتی از وضعیت افقی می‌گذرد به‌دست آورید.



شکل ۱۰-۵۰ مسئلهٔ ۸۱

حل:

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow Mgh = \frac{۱}{۲} I\omega^۲$$

$$h = \frac{L}{۲}\sin\theta$$

$$I = \frac{۱}{۳}ML^۲$$

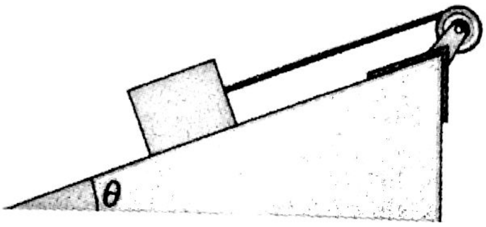
با جایگذاری به‌دست می‌آوریم:

$$\omega^۲ = ۳\frac{g}{L}\sin\theta$$

$$\omega = \sqrt{۳\times\frac{۹/۸}{۲}\sin(۲۰°)} = ۳/۱ \text{ rad/s}$$

Scanned by CamScanner

۸۷- در شکل ۱۰-۵۲ چرخی به شعاع $0.20\,m$ روی محوری افقی و بدون اصطکاک قرار گرفته است. ریسمان بدون جرمی به دور این چرخ پیچیده شده است و طرف دیگر آن به یک جعبهٔ $2.0\,kg$ که روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی می‌لغزد قرار دارد. زاویهٔ سطح شیبدار با افق $\theta = 20°$ است. جعبه روی سطح با شتاب $2.0\,m/s^2$ به طرف پایین حرکت می‌کند. لختی چرخشی چرخ را حول محورش به‌دست آورید.

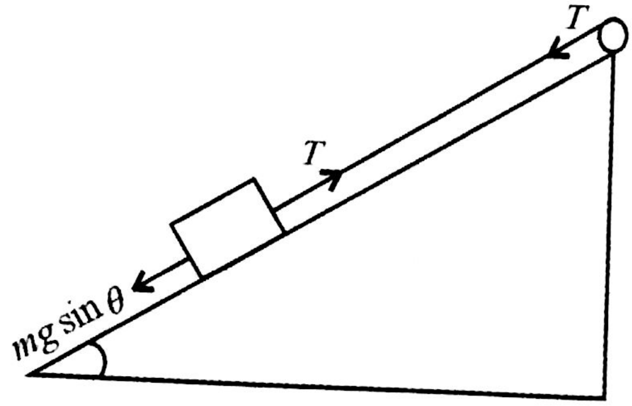


شکل ۱۰-۵۲ مسئلهٔ ۸۷

حل: قانون نیوتون را برای جسم می‌نویسیم:

$$mg\sin\theta - T = ma$$

$$T = m(g\sin\theta - a)$$



از طرفی برای قرقره داریم:

$$TR = I\alpha \quad \text{و} \quad a = R\alpha$$

$$T = \frac{I\alpha}{R^2}$$

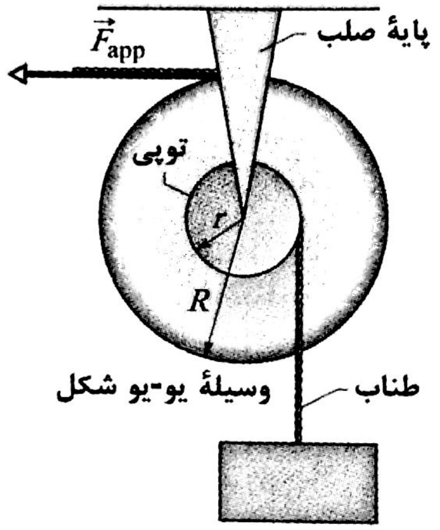
جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{I\alpha}{R^2} = m(g\sin\theta - a) \Rightarrow I = R^2 m\left(\frac{g}{a}\sin\theta - 1\right)$$

$$I = (0.2)^2 \times 2\left(\frac{9.8}{2}\sin(20°) - 1\right) = 0.054\,kg\cdot m^2$$

Scanned by CamScanner

۹۸- یک وسیلهٔ یویو شکل به محوری افقی و بدون اصطکاک وصل شده است که از آن برای بلند کردن یک جعبهٔ ۳۰kg نشان داده شده در شکل ۱۰-۵۶ ، استفاده می‌شود. شعاع خارجی این وسیله ۰/۵۰m و شعاع r توپی آن ۰/۲۰m است. وقتی نیروی افقی $\vec{F}_{\text{app}}$ با بزرگی ۱۴۰N را به طنابی که به دور لبهٔ خارجی این وسیله پیچیده شده است وارد کنیم، جعبه که از یک طناب آویزان است با شتابی به بزرگی ۰/۸۰ m/s² به طرف بالا حرکت می‌کند. لختی چرخشی این وسیله حول محور چرخش آن چقدر است؟



شکل ۱۰-۵۶ مسئلهٔ ۹۸

حل: قانون نیوتون را برای حرکت جسم می‌نویسیم. T ، کشش طناب است.

$$T - mg = ma$$

$$T = m(g + a)$$

از طرفی، برای گشتاورها می‌توانیم بنویسیم:

$$F_{\text{app}} R - Tr = I\alpha \qquad \alpha = \frac{a}{r}$$

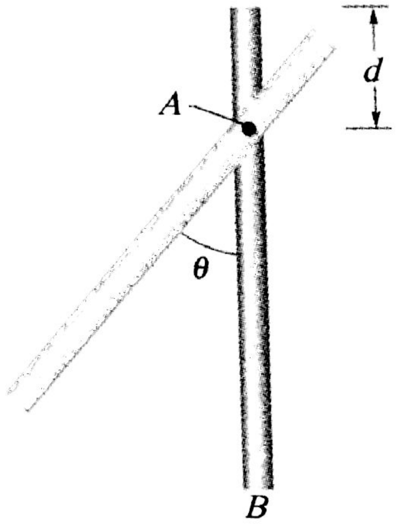
$$F_{\text{app}} R - Tr = I\frac{a}{r} \Rightarrow I = \frac{r}{a}(F_{\text{app}} R - Tr)$$

$$I = \frac{r}{a}[F_{\text{app}}\, R - m(g + a)r]$$

$$I = \frac{۰/۲}{۰/۸}[۱۴۰ \times ۰/۵ - ۳۰(۹/۸ + ۰/۸)۰/۲] = ۱/۶\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲$$

Scanned by CamScanner

۱۰۳- در شکل ۱۰-۶۰ میلهٔ نازک یکنواختی به جرم $۳/۰\text{kg}$ و طول $۴/۰\text{m}$ آزادانه به دور محور افقی A که عمود بر میله و از نقطه‌ای به فاصلهٔ $d = ۱/۰\text{m}$ از انتهای میله می‌گذرد، می‌چرخد. انرژی جنبشی میله وقتی از مکان قائم می‌گذرد برابر ۲۰J است. (الف) لختی چرخشی میله را حول محور A به‌دست آورید. (ب) تندی (خطی) انتهای B میله وقتی میله از مکان قائم می‌گذرد چقدر است؟ (پ) در چه زاویهٔ θ میله به‌طور لحظه‌ای در مسیر حرکتش متوقف می‌شود؟



شکل ۱۰-۶۰ مسئلهٔ ۱۰۳

حل: (الف) از قضیهٔ محورهای موازی استفاده می‌کنیم:

$$I = I_{cm} + Mh^۲$$

$$h = ۲ - ۱ = ۱\text{m}$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}ML^۲ + M(۱)^۲$$

$$I = \frac{۱}{۱۲} \times ۳ \times ۱۶ + ۳ \times (۱) = ۷/۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲$$

(ب) $K = \frac{۱}{۲}I\omega^۲ \Rightarrow \omega^۲ = \frac{۲K}{I} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{۲\times۲۰}{۷}} = ۲/۳۹\,\text{rad/s}$

$$v_B = L\omega = (۴-۱)\,\omega = ۳ \times ۲/۳۹ = ۷/۲\,\text{m/s}$$

(پ) از پایستگی انرژی مکانیکی استفاده می‌کنیم

$$E_۱ = E_۲$$

$$mg\,y(۱-\cos\theta) = K$$

در اینجا y ، فاصلهٔ مرکز جرم تا تکیه‌گاه A است. یعنی

$$y = ۲ - ۱ = ۱\text{m}$$

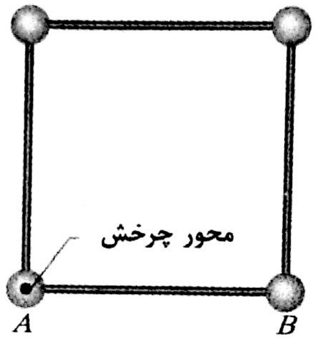
$$۱-\cos\theta = \frac{K}{mg\,y} \Rightarrow \cos\theta = ۱-\frac{K}{mg\,y}$$

$$\cos\theta = ۱-\frac{۲۰}{۳\times ۹/۸\times ۱} = ۰/۳۲$$

$$\theta = \cos^{-۱}(۰/۳۲) \approx ۷۱^\circ$$

Scanned by CamScanner

۱۰۴- چهار ذره هر یک به جرم $۰/۲۰\text{kg}$ در چهار رأس مربعی به ضلع $۰/۵۰\text{m}$ قرار دارند. این ذره‌ها توسط میله‌هایی با جرم ناچیز به هم متصل‌اند. این جسم صلب می‌تواند در صفحه‌ای قائم حول محور افقی A که از یکی از ذره‌ها می‌گذرد بچرخد. جسم را از حال سکون در حالی که میلهٔ AB به صورت افقی است مطابق شکل ۱۰-۶۱، رها می‌کنیم. (الف) لختی چرخشی جسم حول محور A چقدر است؟ (ب) تندی زاویه‌ای جسم حول محور A در لحظه‌ای که میلهٔ AB به حالت قائم در می‌آید چقدر است؟

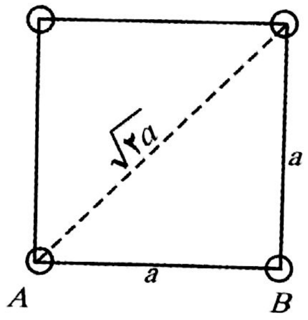


شکل ۱۰-۶۱ مسئلهٔ ۱۰۴

حل: (الف)

$$I = \sum_i m_i r_i^۲$$

$$I = ma^۲ + ma^۲ + m۲a^۲ = ۴ma^۲$$



$$I = ۴ \times ۰/۲ \times (۰/۵)^۲ = ۰/۲\text{kg}\cdot\text{m}^۲$$

(ب) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. مرکز جرم از $y_۱ = \frac{a}{۲}$ به $y_۲ = -\frac{a}{۲}$ جابه‌جا می‌شود.

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow mg\frac{a}{۲} = -mg\frac{a}{۲} + \frac{۱}{۲}I\omega^۲$$

$$\frac{۱}{۲}I\omega^۲ = mga \Rightarrow \omega^۲ = \frac{۲mga}{I}$$

در اینجا، m ، جرم کل است.

$$\omega = \sqrt{\frac{۲\times۴\times۰/۲\times۹/۸\times۰/۵}{۰/۲}} = ۶/۳\ \text{rad/s}$$

Scanned by CamScanner